

Geração Estocástica de Orientação de Descontinuidades Conforme a Distribuição de Fisher

Rubén Medinaceli-Tórrez

Doutorando, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil, ruben.medinaceli@usp.br

Paulo Gustavo Cavalcante Lins

Professor, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil, plins@ufba.br

Tarcísio Barreto Celestino

Professor, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil, e Themag Engenharia, São Paulo, SP, Brasil, tbcelest@usp.br

RESUMO: A orientação de descontinuidades é um dos principais parâmetros utilizados na modelagem estocástica de maciços rochosos. A distribuição de Fisher é a mais utilizada quando se trata de representar a dispersão de uma família de descontinuidades. No contexto de representação estatística de propriedades geomecânicas de maciços rochosos, um dos algoritmos necessários nas simulações de Monte Carlo refere-se à geração de orientações de descontinuidades conforme uma dada distribuição de probabilidade. Um algoritmo de referência para geração de orientações de descontinuidades é discutido. Este algoritmo envolve a geração de dois ângulos em relação à orientação média. O primeiro ângulo relaciona-se com o azimute do vetor mergulho sendo dado por um número aleatório entre zero e 360° . O segundo ângulo é gerado a partir de uma expressão da função de distribuição acumulada de Fisher. Três expressões matemáticas para a representação da função de distribuição acumulada foram encontradas na literatura. Estas três expressões foram testadas computacionalmente. O presente trabalho se propõe a sistematizar a discussão sobre geração de orientações regidas pela distribuição de Fisher. Alguns problemas que foram observados na geração das distribuições são discutidos.

PALAVRAS-CHAVE: Descontinuidade, Orientação, Distribuição de Fisher, Simulação.

ABSTRACT: Discontinuity orientation is one of the main parameters used in stochastic modeling of rock masses. The Fisher distribution is the most used when it comes to representing the dispersion of a discontinuities family. In the context of statistical representation of geomechanical properties of rock masses, one of the algorithms required in Monte Carlo simulations refers to the generation of discontinuity orientations according to a given probability distribution. A reference algorithm for generating discontinuity orientations is discussed. This algorithm involves generating two angles relative to the mean orientation. The first angle relates to the azimuth of the dip vector and is given by a random number between zero and 360° . The second angle is generated from an expression of Fisher's cumulative distribution function. Three mathematical expressions for representing the cumulative distribution function were found in the literature. These three expressions were tested computationally. The present work aims at systematizing the discussion on the generation of orientations governed by the Fisher distribution. Some problems that were observed in generating the distributions are discussed.

KEYWORDS: Discontinuity, Orientation, Fisher Distribution, Simulation.

1 INTRODUÇÃO

A descrição quantitativa de descontinuidades em maciços rochosos envolve conhecer: orientação, espaçamento, persistência, rugosidade, resistência das paredes, abertura, preenchimento, condições de percolação, número de famílias e tamanho dos blocos, conforme preconiza a ISRM (1978). Em um processo

de modelagem estatística de um maciço rochoso um ou mais destes parâmetros podem ser representados por funções de distribuição de probabilidade.

A representação da orientação como uma estatística em uma distribuição esférica é realizada por diversos modelos; pode-se citar, por exemplo, Fisher (1953), Bingham (1964) e Kent (1982). Uma discussão geral sobre estes tipos de modelos pode ser encontrada em Mardia (1972) e Fisher *et al.* (1987).

No presente trabalho será discutida a geração estocástica de orientação de descontinuidades conforme a distribuição de Fisher (1953). Elementos de três formulações para a geração estocástica serão considerados como base: Dershowitz (1984), Jimenez-Rodriguez e Sitar (2005) e Zheng *et al.* (2014). O programa MCSDO_OPEN de Zheng *et al.* (2014) é utilizado como base para o presente estudo. As duas outras formulações para gerar o ângulo de dispersão foram adaptadas dentro do programa. O trabalho busca delinear a aplicabilidade das três formulações. De forma complementar foram realizadas gerações orientações de famílias de descontinuidades com o programa comercial UnWedge (Rocscience, 2024).

2 DISTRIBUIÇÃO DE FISHER

Uma família de descontinuidades possui uma orientação média e uma dispersão que pode ser representada pelo modelo de Fisher (1953). Conforme Goodman (1976), Goodman (1989) e Celestino e Diniz (1998), se para uma família são considerados N planos de descontinuidades e que o módulo do vetor resultante da soma dos vetores unitários normais dos N planos é dado por $|\bar{R}|$, o índice de dispersão (k_f) do modelo de Fisher (1953) é dado por:

$$k_f = \frac{N}{N - |\bar{R}|} \quad (1)$$

Deve ser referido que diversos autores colocam $(N-1)$ no numerador da equação (1), como por exemplo, Zheng *et al.* (2014).

Valores pequenos de k_f indicam uma dispersão grande. Valores grandes de k_f indicam uma dispersão pequena. No limite, um valor de k_f infinito indica que não existe dispersão e todos os vetores possuem exatamente a mesma orientação.

A probabilidade P de que a normal de um plano irá fazer um ângulo menor ou igual a ψ com a orientação média é descrito implicitamente por:

$$\cos\psi = 1 + \frac{1}{k_f} \ln(1 - P) \quad (2)$$

O desvio padrão da distribuição hemisférica normal ($\bar{\psi}$) também pode ser utilizado para expressar a dispersão das orientações normais em torno da média:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{k_f}} \quad (3)$$

Goodman (1976), Goodman (1989), Celestino e Diniz (1998) e Zheng *et al.* (2014) detalham o processo de cálculo do índice de dispersão a partir de dados de orientação levantados em campo.

3 ALGORITMO DE GERAÇÃO ESTOCÁSTICA

O algoritmo de Zheng *et al.* (2014) será utilizado como base para o desenvolvimento. A orientação média da família de descontinuidades é definida pelo mergulho médio (δ_m) e pela direção de mergulho média (θ_m). Conforme pode ser observado na Figura 1, no sistema de coordenadas original x é leste, y é norte e z é o zênite. Um novo sistema de coordenadas pode ser determinado por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (4)$$

Onde A é a matriz de transformação de coordenadas, sendo dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \beta_m \cdot \cos \alpha_m & -\sin \alpha_m & \sin \beta_m \cdot \cos \alpha_m \\ \cos \beta_m \cdot \sin \alpha_m & \cos \alpha_m & \sin \beta_m \cdot \sin \alpha_m \\ -\sin \beta_m & 0 & \cos \beta_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

Onde α_m e β_m , conforme Figura 1, podem ser determinados por:

$$\beta_m = \delta_m \quad (6)$$

$$\alpha_m = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta_m & \text{quando } \theta_m \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{2} - \theta_m & \text{quando } \theta_m > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (7)$$

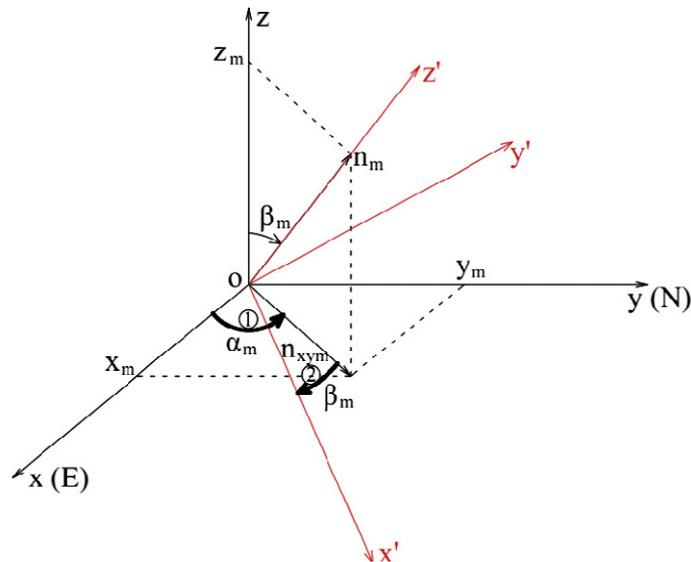


Figura 1. Sistema de coordenadas cartesianas original (x, y, z) e sistema de coordenadas cartesianas transformado (x', y', z') (Zheng *et al.*, 2014).

Para cada plano, dois números pseudo-aleatórios ($R1$ e $R2$) serão gerados no intervalo $[0, 1]$. Em seguida serão determinados dois ângulos:

$$\alpha' = 2 \cdot \pi \cdot R1 \quad (8)$$

$$\beta' = \cos^{-1} \left\{ \frac{\ln[e^{k_f} - (2 \cdot \sinh k_f \cdot R2)]}{k_f} \right\} \quad (9)$$

Com os valores de α' e β' , as coordenadas do plano podem ser determinadas no sistema de coordenadas original por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \sin \beta' \cdot \cos \alpha' \\ \sin \beta' \cdot \sin \alpha' \\ \cos \beta' \end{bmatrix} \quad (10)$$

Nas convenções adotadas o vetor normal unitário é superior, então z não deve ser menor que zero. Se $z < 0$, então:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \sin \beta' \cdot \cos \alpha' \\ \sin \beta' \cdot \sin \alpha' \\ \cos \beta' \end{bmatrix} \quad (11)$$

O mergulho (δ) e a direção de mergulho (θ) do plano gerado são dados por:

$$\delta = \cos^{-1} z \quad (12)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x}{y} \quad (13)$$

Na abordagem de Dershowitz (1984), na sua programação, a Equação (9) seria substituída por:

$$\beta' = \cos^{-1} \left\{ \frac{\ln[e^{k_f} + R2 \cdot (1.0 - e^{k_f})]}{k_f} \right\} \quad (14)$$

No equacionamento de Jimenez-Rodriguez e Sitar (2005), e Equação (9) seria substituída por:

$$\lambda = e^{-2 \cdot k_f} \quad (15a)$$

$$\beta' = 2 \cdot \sin^{-1} \left\{ \frac{-\ln(R2 \cdot (1 - \lambda) + \lambda)}{2 \cdot k_f} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (15b)$$

O programa VBA/Excel MCSDO_OPEN foi modificado criando duas versões novas com as outras formulações. O programa possui os algoritmos para identificar e ajustar orientações que se estendem além da borda de uma projeção do hemisfério superior, detalhados em Zheng *et al.* (2014).

4 RESULTADOS

Para as simulações foram consideradas as três famílias de descontinuidades apresentadas na Tabela 1.

Para 100 amostras geradas os valores de índice de Fisher calculados são apresentados nas Tabelas 2 e 3, para k_f de simulação respectivamente iguais a 100 e 10.

Para 1000 amostras geradas os valores de índice de Fisher calculados são apresentados nas Tabelas 4 e 5, para k_f de simulação respectivamente iguais a 100 e 10.

Para 10000 amostras geradas os valores de índice de Fisher calculados são apresentados nas Tabelas 6 e 7, para k_f de simulação respectivamente iguais a 100 e 10.

Os polos para simulação com 1000 amostras geradas com $k_f = 100$ e a formulação de Zheng *et al.* (2014) são mostrados na Figura 2. Os polos para simulação com 1000 amostras geradas com $k_f = 10$ e a formulação de Zheng *et al.* (2014) são mostrados na Figura 3.

Tabela 1. Orientação média das famílias de descontinuidades.

| Família | Mergulho | Direção de mergulho |
|---------|----------|---------------------|
| F1 | 40 | 20 |
| F2 | 60 | 130 |
| F3 | 70 | 250 |

Tabela 2. Valores de k_f calculados, para 100 amostras geradas, com $k_f = 100$.

| Formulação | F1 | F2 | F3 |
|----------------------------------|--------|--------|---------|
| Zheng <i>et al.</i> (2014) | 101,84 | 101,84 | 101,84 |
| Dershowitz (1984) | 101,84 | 101,84 | 101,84 |
| Jimenez-Rodriguez e Sitar (2005) | 89,72 | 89,72 | 89,72 |
| UnWedge | 92,60 | 95,22 | 118,482 |

Tabela 3. Valores de k_f calculados, para 100 amostras geradas, com $k_f = 10$.

| Formulação | F1 | F2 | F3 |
|----------------------------------|-------|-------|-------|
| Zheng <i>et al.</i> (2014) | 10,18 | 10,18 | 10,99 |
| Dershowitz (1984) | 10,18 | 10,18 | 10,33 |
| Jimenez-Rodriguez e Sitar (2005) | 9,26 | 9,26 | 9,26 |
| UnWedge | 9,26 | 9,52 | 11,85 |

Tabela 4. Valores de k_f calculados, para 1000 amostras geradas, com $k_f = 100$.

| Formulação | F1 | F2 | F3 |
|----------------------------------|--------|--------|--------|
| Zheng <i>et al.</i> (2014) | 102,90 | 102,90 | 102,90 |
| Dershowitz (1984) | 102,90 | 102,90 | 102,90 |
| Jimenez-Rodriguez e Sitar (2005) | 100,44 | 100,44 | 100,44 |
| UnWedge | 100,43 | 98,84 | 100,23 |

Tabela 5. Valores de k_f calculados, para 1000 amostras geradas, com $k_f = 10$.

| Formulação | F1 | F2 | F3 |
|----------------------------------|-------|-------|-------|
| Zheng <i>et al.</i> (2014) | 10,29 | 10,29 | 10,29 |
| Dershowitz (1984) | 10,29 | 10,29 | 10,29 |
| Jimenez-Rodriguez e Sitar (2005) | 10,31 | 10,31 | 10,31 |
| UnWedge | 10,04 | 9,89 | 10,02 |

Tabela 6. Valores de k_f calculados, para 10000 amostras geradas, com $k_f = 100$.

| Formulação | F1 | F2 | F3 |
|----------------------------------|--------|--------|--------|
| Zheng <i>et al.</i> (2014) | 101,41 | 101,41 | 101,41 |
| Dershowitz (1984) | 101,41 | 101,41 | 101,41 |
| Jimenez-Rodriguez e Sitar (2005) | 99,99 | 99,99 | 99,99 |
| UnWedge | 99,92 | 100,77 | 98,93 |

Tabela 7. Valores de k_f calculados, para 10000 amostras geradas, com $k_f = 10$.

| Formulação | F1 | F2 | F3 |
|----------------------------------|-------|-------|-------|
| Zheng <i>et al.</i> (2014) | 10,14 | 10,14 | 10,14 |
| Dershowitz (1984) | 10,14 | 10,14 | 10,14 |
| Jimenez-Rodriguez e Sitar (2005) | 10,28 | 10,28 | 10,28 |
| UnWedge | 9,99 | 10,08 | 9,89 |

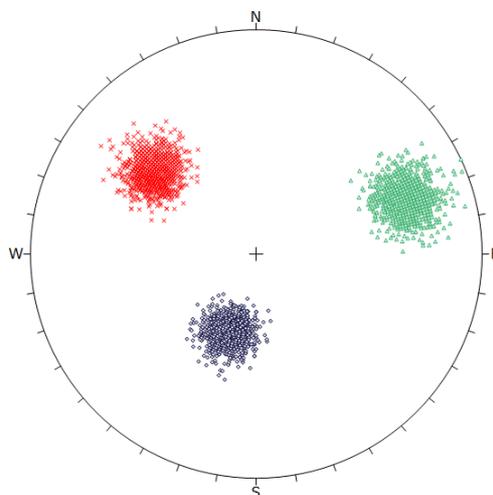


Figura 2. Polos para simulação com 1000 amostras geradas (3 famílias com 1000 amostras cada), $k_f = 100$, formulação de Zheng *et al.* (2014).

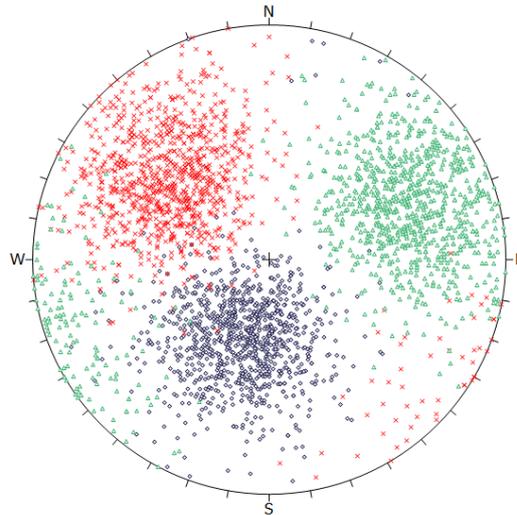


Figura 3. Polos para simulação com 1000 amostras geradas, $k_f = 10$ (3 famílias com 1000 amostras cada), formulação de Zheng *et al.* (2014).

Para verificar se com o aumento do número de planos gerados ocorre convergência para o valor teórico foram realizadas análises de sensibilidade. Para a formulação de Zheng *et al.* (2014) os resultados são apresentados na Figura 4. O programa comercial UnWedge gerou os resultados apresentados na Figura 5.

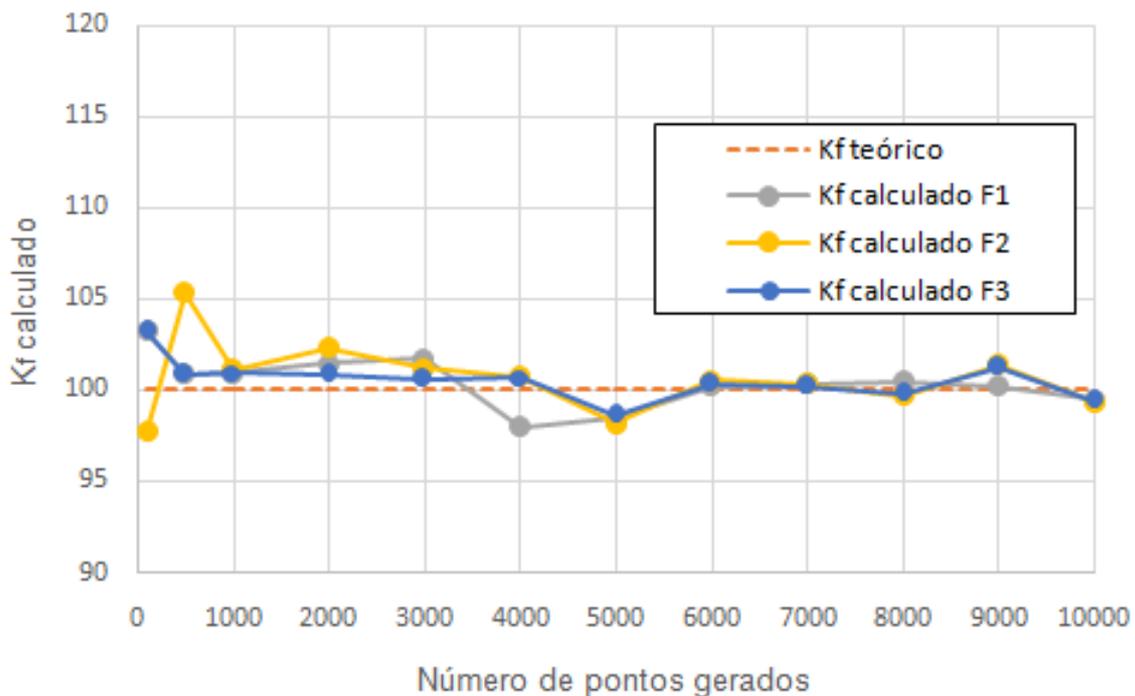


Figura 4. Valor do k_f calculado em função do número de amostras geradas, valor teórico de $k_f = 100$, formulação de Zheng *et al.* (2014).

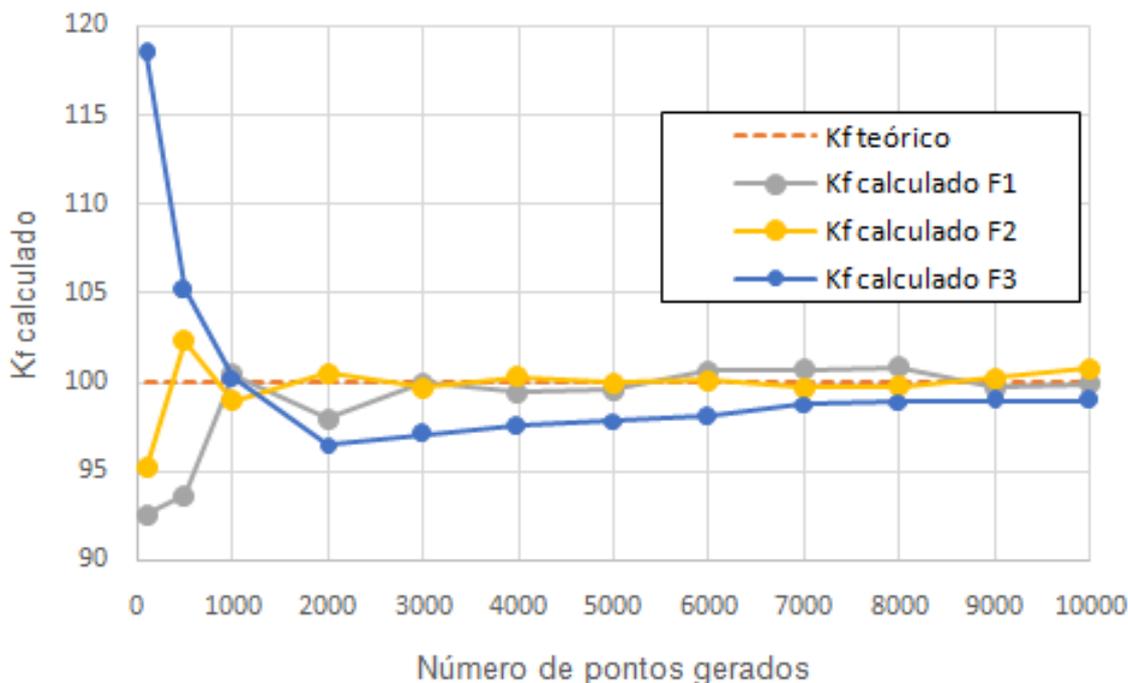


Figura 5. Valor do k_f calculado em função do número de amostras geradas, valor teórico de $k_f = 100$, resultados do UnWedge.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados são tanto melhores se nas Tabelas 2, 4 e 6 os valores calculados se aproximem de 100, e nas Tabelas 3, 5 e 7 se os valores calculados se aproximem de 10.

Os resultados para as formulações de Zheng *et al.* (2014) e Dershowitz (1984) são numericamente idênticos. As equações (9) e (17) não são idênticas. Para valores de k_f inferiores a -5 estas equações apresentam diferenças significativas. Mas para valores de k_f entre 0 e 100, os resultados numéricos são muito similares.

As três formulações consideradas apresentam uma regularidade de resultados. Isto deve estar associado ao processo de geração de números pseudo-aleatórios do VBA/Excel. No código MCSDO_OPEN não existe inicialização da semente da geração dos números pseudo-aleatórios. Assim se o programa é aberto, a primeira rodada de geração irá obter sempre os mesmos números, o que se repete para outro conjunto de números na segunda rodada de geração e assim por diante. Os dados das Tabelas 2 a 7 se referem sempre à primeira geração de número pseudo-aleatórios.

A documentação do programa UnWedge não detalha o processo de geração de números pseudo-aleatórios que utilizada. Mas os resultados apresentam pequena variação.

Para a geração dos dados da análise de sensibilidade apresentada na Figura 4, as rodadas de geração de números pseudo-aleatórios foram realizadas em sequência. Isto leva a gerações diferentes. Com o aumento do número de pontos gerados o resultado tende assintoticamente para o valor teórico.

Conforme pode ser observado na Figura 5, nas simulações com o programa comercial UnWedge ocorreu também uma tendência para o valor teórico com o aumento no número de gerações.

6 CONCLUSÕES

As três expressões matemáticas para representar a função de distribuição acumulada do modelo de Fisher funcionam de forma semelhante. As formulações de Zheng *et al.* (2014) e Dershowitz (1984) apresentaram resultados numericamente idênticos.

Para o trabalho com o programa MCSDO_OPEN o gerador de números pseudo-aleatórios exerce influência nos resultados. No caso de geração de orientações de descontinuidades para simulações de Monte Carlo, uma opção pode ser realizar várias gerações até que o valor do índice de Fisher calculado esteja dentro de uma margem definida como aceitável.

Os resultados obtidos com o programa MCSDO_OPEN e com o programa comercial UnWedge mostraram-se coerentes. Isto aumenta a confiança na utilização do programa MCSDO_OPEN.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao Dr. Zheng Jun da Zhejiang University, China, por fornecer cópia do programa MCSDO_OPEN.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bingham, C. (1964) *Distributions on the sphere and on the projective plane*. PhD Thesis, Yale University. 99p.
- Celestino, T.B., Diniz, N.C. (1998) Informática. In: Oliveira, A.M.S., Brito, S.N.A. *Geologia de Engenharia*. São Paulo, Associação Brasileira de Geologia de Engenharia. p.227-241.
- Dershowitz, W.S. (1984) *Rock joint systems*. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology. 918 p.
- Fisher, N.I., Lewis, T., Embleton, B.J.J. (1987) *Statistical analysis of spherical data*. Cambridge, Cambridge University Press. 329p.
- Fisher, R. (1953) Dispersion on a sphere. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 217(1130), p.295-305.
- Goodman, R.E. (1976) *Methods of geological engineering in discontinuous rocks*. St. Paul, West Publishing Company. 472p.
- Goodman, R.E. (1989) *Introduction to rock mechanics*. 2nd Edition. New York, Wiley. 562p.
- ISRM (1978) Suggested Methods for the quantitative description of discontinuities in rock masses. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 15(6), p.319-368. (Também: *Métodos para a descrição quantitativa de descontinuidades em maciços rochosos*. Tradução No. 12, São Paulo, ABGE, 1983. 132p.).
- Jimenez-Rodriguez, R., Sitar, N. (2005) *Influence of stochastic discontinuity network parameters on the formation of removable blocks in rock slopes*. GeoEngineering Report No. UCB/GE-2005/02. Disponível em: <https://nisee.berkeley.edu/elibrary/>. Acesso em: 20 ago. 2016.
- Kent, J.T. (1982) The Fisher-Bingham distribution on the sphere. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 44(1), p.71-80.
- Mardia, K.V. (1972) *Statistics of directional data*. London, Academic Press. 357p.
- Rocscience (2024) *UnWedge*. Disponível em: <https://www.rocscience.com/>. Acesso em: 20 mar. 2024.
- Zheng, J., Deng, J., Yang, X., Wei, J., Zheng, H., Cui, Y. (2014) An improved Monte Carlo simulation method for discontinuity orientations based on Fisher distribution and its program implementation. *Computers and Geotechnics*, 61, p.266-276.