

# Implementação do modelo Cam Clay viscoplástico em programa de elementos finitos para previsão de recalques de longo prazo

Alessandro Cirone  
Professor, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, acirone@puc-rio.br

**RESUMO:** Este trabalho apresenta uma versão viscoplástica do modelo constitutivo Cam Clay Modificado e sua implementação em programa de elementos finitos. O modelo constitutivo original, elastoplástico, isotrópico e associado, é transformado em modelo viscoplástico por meio da Teoria de Perzyna, empregando uma função de núcleo viscoso com estrutura matemática semelhante à clássica 'Rate Process Theory'. A implementação numérica do modelo é realizada via algoritmo de retorno implícito. Para avaliar a presente formulação, são realizados alguns testes numéricos com o software comercial de elementos finitos Plaxis 2D simulando um aterro rodoviário construído sobre solos moles.

**PALAVRAS-CHAVE:** solo mole, viscoplasticidade, aterro, recalque secundário.

**ABSTRACT:** This work presents a viscoplastic version of the Modified Cam Clay constitutive model and its implementation in a finite element program. The original constitutive model, which is elastoplastic, isotropic, and associated, is transformed into a viscoplastic model using Perzyna's Theory, employing a viscous nucleus function with mathematical structure similar to the classical 'Rate Process Theory'. The numerical implementation of the model is carried out via an implicit return mapping algorithm. To evaluate the current formulation, several numerical tests are performed using the commercial finite element software Plaxis 2D, simulating a highway embankment built on soft soils.

**KEYWORDS:** soft soil, viscoplasticity, embankment, secondary settlement.

## 1 INTRODUÇÃO

Muitos problemas práticos são atualmente analisados via análise tensão-deformação. Um problema recorrente é a previsão de recalques de longo prazo, onde a viscosidade do material desempenha um papel importante. Exemplo típico são as argilas moles, materiais geológicos com pronunciado adensamento secundário, produto de deformações viscosas. Para sua previsão, propõe-se utilizar um modelo constitutivo viscoplástico embasado no Cam Clay Modificado, que é reconhecido por seu bom desempenho na previsão do comportamento de materiais pouco ou nada sobre-adensados. Ao contrário dos modelos constitutivos disponíveis em softwares comerciais, fundamentados na proposta de Mesri, este trabalho adota a 'Rate Process Theory', incorporando a Teoria de Perzyna no modelo Cam Clay. Após apresentar a formulação do modelo, o presente trabalho explica, em linhas gerais, a implementação em software de elementos finitos, trazendo alguns exemplos para mostrar suas capacidades preditivas.

## 2 O MODELO CAM CLAY MODIFICADO VISCOPLÁSTICO

O modelo adota a decomposição da deformação total,  $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$ , onde  $\epsilon^e$  é a parcela elástica e  $\epsilon^p$  é a parcela viscoplástica.

### 2.1 Deformação elástica

São utilizadas as relações constitutivas hipoeásticas do modelo Cam Clay. Os módulos instantâneos são calculados como:

$$K = \frac{p'}{\kappa^*}, \quad G = K \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \quad (1)$$

onde  $K$  é o módulo volumétrico,  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $\kappa^*$  é o índice de expansão modificado,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson, e  $p'$  é a tensão efetiva média. O módulo elástico volumétrico varia com a tensão efetiva, enquanto o coeficiente de Poisson é constante. O parâmetro  $\kappa^*$  determina a compressibilidade elástica do material em função da tensão efetiva confinante.

## 2.2 Deformação viscoplástica

Adotando a abordagem de Perzyna (1963, 1966), a taxa da deformação viscoplástica ( $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ ) é calculada pela seguinte lei de fluxo:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{\mu} \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (2)$$

onde  $\mu$  é o parâmetro de fluidez, que pode variar com a temperatura,  $\phi$  é o núcleo viscoso,  $F$  é a função de 'overstress',  $g$  é o potencial plástico,  $\sigma'_{ij}$  é o tensor da tensão efetiva, e  $\langle \rangle$  é o operador de Macauley, que indica  $\langle \phi(F) \rangle = 0$  para  $F \leq 0$  e  $\langle \phi(F) \rangle = \phi(F)$  para  $F > 0$ .

O formato matemático de  $\phi(F)$  pode ser obtido experimentalmente ou analiticamente. Neste estudo, utiliza-se uma função hiperbólica, fundamentada em considerações de micromecânica, oriunda da 'Rate Process Theory' (Bhandari & Inoue, 2005):

$$\phi(F) = \sinh(bF) \quad (3)$$

onde  $b$  é uma constante que controla a sensibilidade do material à taxa de deformação.

O modelo é associado. Em outras palavras, o potencial plástico coincide com a função de escoamento. Sua adaptação viscoplástica, de acordo com a abordagem de Perzyna, é dada por:

$$F = \frac{p_{eq}}{p_0} - 1, \quad p_{eq} = p' + \frac{q^2}{M^2 p'} \quad (4)$$

na qual,  $p_{eq}$  é o correspondente 'equivalent stress' (a tensão equivalente),  $p_0$  é o parâmetro de endurecimento, também chamado de pressão de pré-adensamento, e  $M$  é o parâmetro de estado crítico. A Figura 1 apresenta o modelo no espaço dos invariantes triaxiais. Existem duas elipses: a elipse de referência e a elipse de carregamento. O tamanho da elipse de carregamento aumenta com a taxa de deformação. O tamanho da elipse de referência aumenta com o endurecimento do material, conforme ilustrado no próximo item.

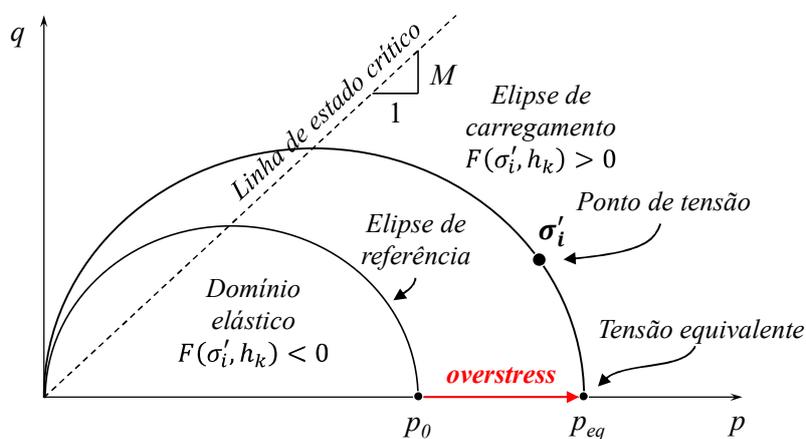


Figura 1. Modelo Cam-Clay Viscoplastico no plano p-q (também conhecido como espaço de Cambridge).

### 2.3 Lei de endurecimento

O modelo segue a lei de endurecimento isotrópico do modelo Cam Clay:

$$p_0 = p_0^{ref} \exp\left(\frac{\Delta\epsilon_v^p}{\lambda^* - \kappa^*}\right) \quad (5)$$

onde  $\lambda^*$  é o índice de expansão modificado,  $p_0^{ref}$  é o valor inicial de referência, e  $\Delta\epsilon_v^p$  é a deformação volumétrica viscoplástica.

### 2.4 Parâmetros do modelo

Tratando-se de um modelo viscoplástico de Perzyna, além das componentes originais do modelo Cam Clay, o modelo proposto requer dois parâmetros adicionais para definir o comportamento viscoso. Na configuração atual, o modelo possui sete parâmetros, dos quais cinco são originários do Cam Clay Modificado e dois pertencem à viscoplasticidade, conforme mostrado na Tabela 1, a seguir.

Tabela 1. Resumo do modelo Cam Clay viscoplástico.

Componente	Parâmetro	Nome	Descrição – Calibração
Cam Clay Modificado	$\lambda^*$	Índice de compressão modificado	Inclinação da linha de compressão virgem no plano ( $\epsilon_v - \ln p'$ )
	$\kappa^*$	Índice de expansão modificado	Inclinação da linha de descarregamento no plano ( $\epsilon_v - \ln p'$ )
	$\nu$	Coefficiente de Poisson	É uma constante que relaciona os módulos elásticos entre si.
	$M$	Parâmetro de estado crítico	Inclinação da linha de estado crítico no plano ( $p' - q$ ) para compressão triaxial.
	$p_0$	Pressão de pré-adensamento	Parâmetro de endurecimento. Evolui com a deformação volumétrica plástica
Fluxo viscoso	$\mu$	Fluidez	Representa a viscosidade. Pode variar com a temperatura de acordo com a Lei de Arrhenius
	$b$	Sensibilidade à taxa de deformação	Controla o comportamento viscoso do material pela 'Rate Process Theory'.

## 3 IMPLEMENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

O presente modelo constitutivo é implementado em programa de elementos finitos (Plaxis 2D) através da opção User Defined Soil Model (UDSM). Para ser utilizado como modelo definido pelo usuário, o código compilado como Dynamic Link Library (DLL) deve ser colocado dentro da pasta udsm, no diretório do programa.

### 3.1 Algoritmo de retorno implícito

A integração das equações constitutivas segue o clássico esquema preditor-corretor. A correção é feita tendo como referência o estado final, uma vez que a direção do fluxo plástico e o núcleo viscoso são avaliados no final do intervalo de integração. O algoritmo de retorno integra as deformações viscoplásticas, resolvendo o seguinte sistema de equações residuais:

$$\begin{cases} r_i = \Delta\lambda b_i - \Delta\epsilon_i^p \\ \rho = \frac{\Delta t}{\mu} \phi - \Delta\lambda \end{cases} \quad (6)$$

onde o vetor  $b_i$  define a direção do fluxo viscoplástico, enquanto o multiplicador  $\Delta\lambda$  é um escalar que representa o módulo da deformação viscoplástica;  $\phi$  é a função de núcleo viscoso,  $r_i$  é o vetor dos resíduos de deformação viscoplástica,  $\rho$  é o resíduo associado ao multiplicador, e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo. O sistema de equações (Eq. 6) é solucionado pelo método iterativo de Newton-Raphson no espaço dos invariantes de tensão ( $p, q$ ). Dessa forma, deve ser resolvido apenas um sistema de duas equações em duas incógnitas.

### 3.2 Interface do usuário

No total, o presente modelo requer sete parâmetros de entrada. A isso soma-se a razão de sobreadensamento inicial,  $OCR_0$ , que deve ser especificada pelo usuário para fins de inicialização do modelo. Estes parâmetros devem ser especificados na aba do programa, mostrada na Figura 2. Além disso, o modelo permite inspecionar, no pós-processamento, os valores calculados das variáveis internas. São elas:

- $p_0$  : pressão de pré-adensamento
- $OCR$  : razão de pré-adensamento isotrópico ( $OCR = p_0/p_{eq}$ )
- $p_{eq}$  : pressão equivalente ( $p_{eq} = p' + \frac{q^2}{M^2 p'}$ )
- $flag$  : marcador

A última variável interna não possui nenhum significado físico. É apenas uma variável de controle dentro do algoritmo. Seu papel é impedir a reinicialização involuntária das outras variáveis internas.

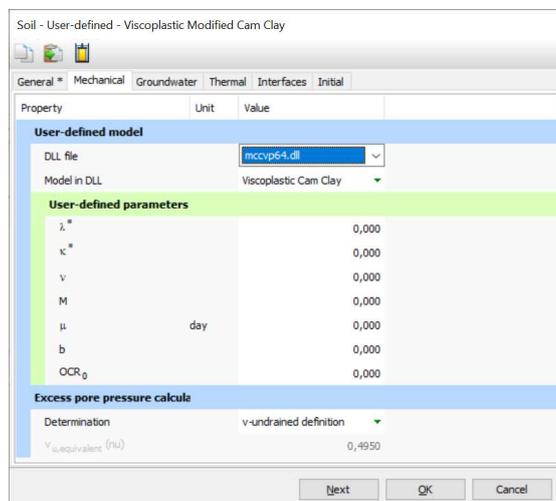


Figura 2. Interface gráfica para entrada dos parâmetros do modelo.

## 4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A implementação numérica do Cam Clay Modificado viscoplástico é avaliada por meio de diferentes testes numéricos, realizados com o software comercial de elementos finitos Plaxis 2D. A avaliação consiste em simular uma série de ensaios de adensamento edométrico de longa duração, além de um tutorial do próprio software, que simula a construção em duas etapas de um aterro sobre solos moles. Todas as simulações são realizadas com elementos triangulares. A opção *Undrained* é selecionada para representar o comportamento não drenado.

Nas simulações dos ensaios de laboratório, o peso específico é mantido nulo e são adotados os parâmetros da argila mole do Sarapuí, listados na Tabela 1. Os resultados experimentais de Lacerda et al. (1977), *apud* Almeida e Ferreira (1992), indicam uma forte variação da permeabilidade ao longo do processo de adensamento. Por isso, é considerada a seguinte lei:

$$\log k/k_0 = \Delta e/c_k \quad (7)$$

Almeida e Marques (2003) reportam a expressão  $\log k_v (cm/s) = 0.9416e - 9.613$ , adotada neste estudo. Não são considerados efeitos de anisotropia na permeabilidade. O índice de vazios de referência é  $e_0 = 4.2$  correspondente à tensão efetiva de 1 kPa. A título de exemplo, na tensão efetiva de 6,25 kPa, o índice de vazios assume o valor de 3.96 e a permeabilidade é cerca de 0.001 m/dia.

Tabela 2. Parâmetros adotados para a argila do Sarapuú.

Material	$\lambda^*$	$\kappa^*$	$\nu$	M	$\mu$ (dias)	b	$p_0$ (kPa)	$k_0$ (m/dia)	$e_0$	$c_k$
Argila do Sarapuú	0.235	0.025	0.2	1.14	11833	9.79	15.0	0.002	4.2	1.06

#### 4.1 Ensaios oedométricos de longa duração

Ensaios oedométricos de longa duração são simulados com o objetivo de avaliar as previsões do modelo constitutivo em termos de recalques por adensamento primário e secundário, nas condições típicas de laboratório.

A Figura 3(a) mostra a malha de elementos finitos, as dimensões do modelo e as condições de contorno adotadas. O modelo numérico é axissimétrico, constituído por 13 elementos triangulares de 6 nós, totalizando 42 nós e 39 pontos de integração. Trata-se de uma coluna de solo com carregamento aplicado no topo. A drenagem é permitida apenas pela face superior. A altura da coluna é igual ao caminho de drenagem ( $H_d = 1$  cm). As tensões iniciais são geradas empregando-se um material elástico fictício com coeficiente de Poisson igual a 0.31. A tensão inicial aplicada é de 6.25 kPa, enquanto a poropressão é nula em todos os pontos. Após a geração do estado de tensões iniciais, os deslocamentos são zerados, o modelo elástico é substituído pelo modelo viscoplástico e inicializa-se a pressão de pré-adensamento em 15 kPa ( $OCR = 2.4$ ). Em seguida, procede-se ao carregamento até 50 kPa, com razão incremental de carregamento  $\Delta\sigma/\sigma = 1$  e com duração de 24 h em cada estágio de carga. Após 24h de adensamento sob 50 kPa, são aplicadas quatro razões  $\Delta\sigma/\sigma$  diferentes, deixando o modelo adensar até estabilização dos recalques. As opções *Update Mesh* e *Update Pore Pressures* são ativadas em todas as etapas de cálculo. A aplicação dos carregamentos é realizada instantaneamente (o incremento de tempo é nulo) via análise do tipo *Plastic*. A fase de adensamento é simulada através da opção *Consolidation*. Em todas as etapas de cálculo, a tolerância é fixada em 1%.

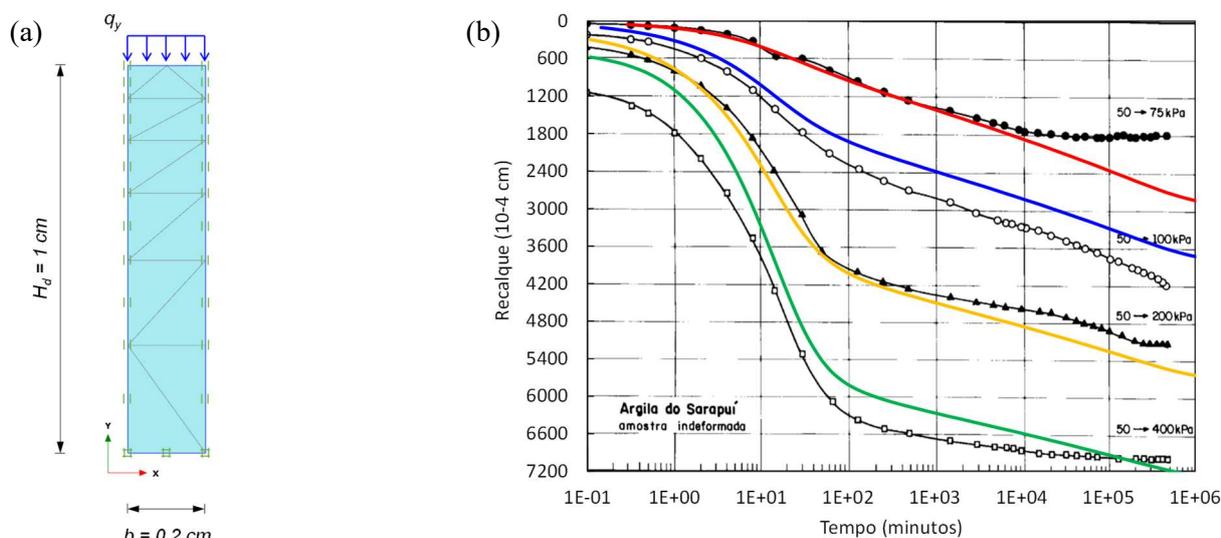


Figura 3. (a) Modelo numérico utilizado para simulação dos ensaios de adensamento. (b) Simulação dos ensaios oedométricos de longa duração. Dados experimentais de Vieira (1988).

A Figura 3(b) apresenta as curvas de recalque versus tempo (escala log) dos ensaios realizados por Vieira (1988), juntamente com as previsões do modelo (curvas vermelha, azul, amarela e verde). Para o mesmo conjunto experimental, a Figura 4 compara o recalque final calculado pelo modelo numérico e o recalque medido. Com exceção do carregamento de 50 para 75 kPa, a previsão do modelo é bastante precisa, visto que os erros individuais de previsão estão na faixa de  $\pm 15\%$ .

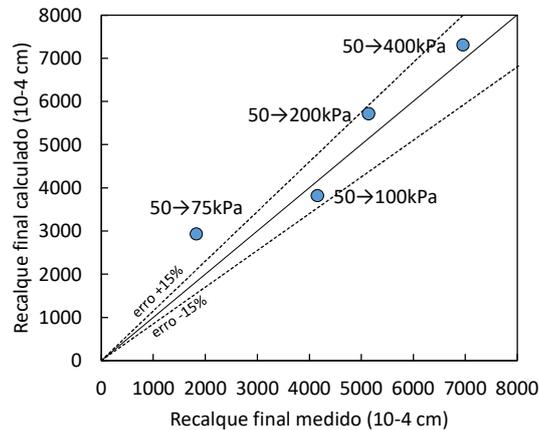


Figura 4. Comparação entre recalque final medido e calculado.

## 4.2 Aterro sobre solos moles

Seguindo um tutorial do próprio Plaxis, simula-se a construção em duas etapas de um aterro sobre solos moles. No tutorial original, o modelo Soft Soil é utilizado para os solos moles. O Soft Soil é um modelo elasto-plástico disponível no Plaxis. Compara-se o modelo Soft Soil com o modelo viscoplástico proposto, mantendo os valores dos parâmetros reportados no tutorial, exceto aqueles que modelam o comportamento viscoso. Em outras palavras, são adotados os valores do modelo Soft Soil reportados no tutorial ( $\lambda^*$ ,  $\kappa^*$ ,  $\nu$ ,  $M$ ,  $OCR$ ,  $k$ ,  $e_0$  e  $c_k$ ) enquanto os valores de  $\mu$  e  $b$  são os mesmos da argila do Sarapuú. O Tutorial 08 – *Construction of a road embankment*, descrito em detalhe na documentação do software, aborda a construção de um aterro sobre solos moles. O modelo numérico é apresentado na Figura 5.

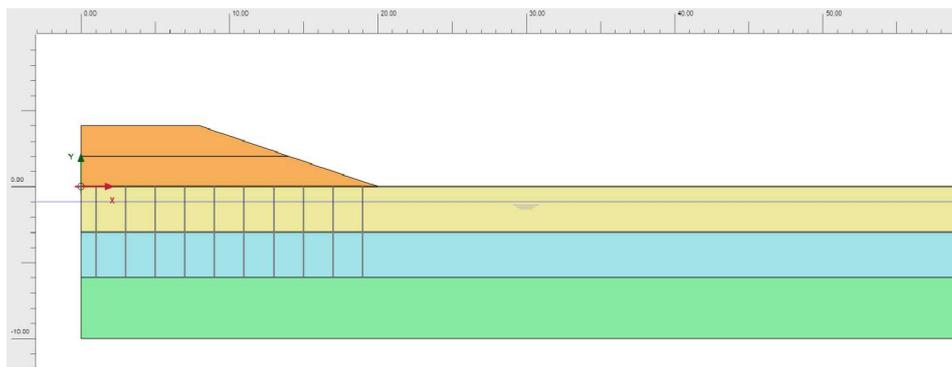


Figura 5. Aterro sobre solos moles – modelo numérico.

O faseamento de cálculo consiste em quatro análises do tipo *Consolidation*. A construção dos primeiros dois metros do aterro é simulada em dois dias. Esta primeira etapa tem tempo de permanência de 30 dias. Em seguida, os últimos dois metros são construídos em um dia. Na última fase de cálculo, a opção *Minimum excess pore pressure* ( $p_{min} = 10^{-6}$  kPa) é selecionada para simular o adensamento de longo prazo. A análise desconsidera os drenos verticais. Os resultados, em termos de excesso de poropressão e recalques previstos, são mostrados nas Figuras 6 e 7. Nos gráficos, a curva vermelha representa a previsão feita pelo modelo elasto-plástico *Soft Soil*. A curva azul representa a previsão feita pelo modelo viscoplástico proposto. O formato

da curva é consequência da construção em duas etapas, com intervalo de 30 dias entre elas. Em função da parcela viscosa, o modelo proposto prevê cerca de vinte centímetros de recalques adicionais, que se desenvolvem ao longo de mil dias. Cabe ressaltar que o recalque secundário não se desenvolve indefinidamente e é mais impactante na fase pós-obra. Durante a construção, a parcela viscosa parece influenciar mais o desenvolvimento das poropressões do que os recalques.

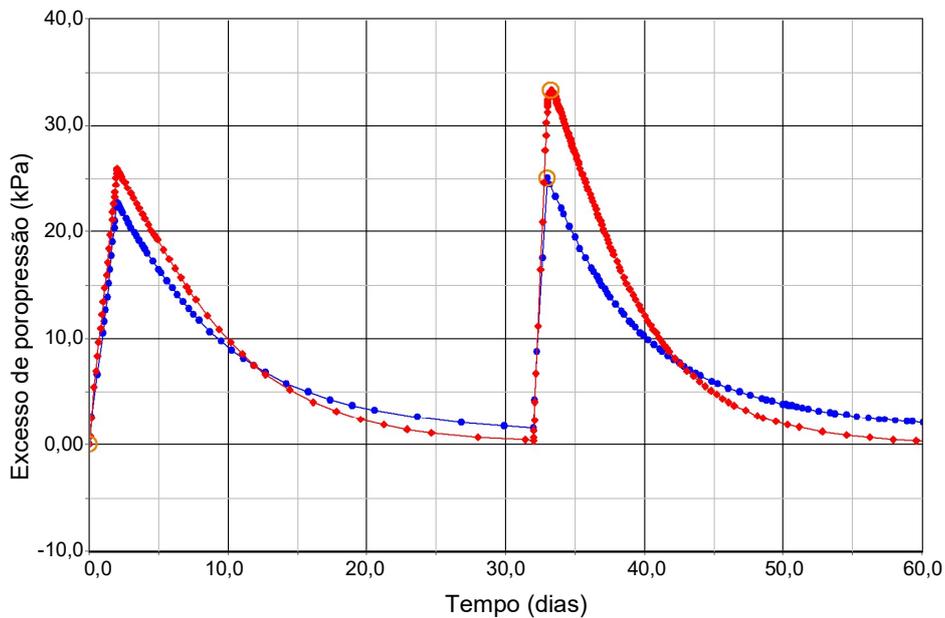


Figura 6. Gráfico do excesso de poropressão abaixo do aterro, no meio das camadas moles.

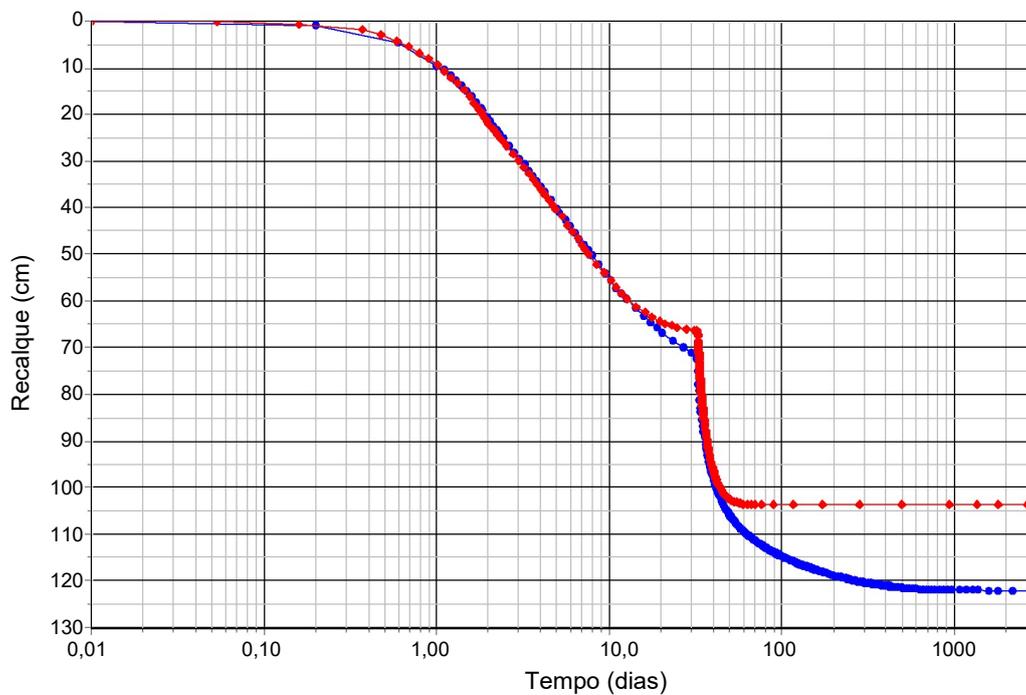


Figura 7. Gráfico de recalque do aterro.

## 5 CONCLUSÃO

Foi apresentada a formulação geral do modelo constitutivo Cam Clay Modificado viscoplástico. O modelo foi implementado em software de elementos finitos via algoritmo de integração implícita. Foram realizados alguns testes numéricos para verificar a implementação. Os resultados numéricos, envolvendo ensaios de adensamento e aterro sobre solos moles, parecem indicar que o trabalho teve êxito em sua implementação.

Comparado com o mais tradicional caso elasto-plástico, o presente modelo viscoplástico necessita apenas de dois parâmetros adicionais. São eles: o parâmetro de fluidez ( $\mu$ ) e a sensibilidade à taxa de deformação ( $b$ ). A calibração desses parâmetros é ilustrada no estudo de Cirone e Vargas (2024).

Há uma grande expectativa quanto à capacidade do modelo em calcular a magnitude do recalque secundário, podendo solucionar muitos problemas práticos.

As próximas atividades a serem realizadas pela pesquisa consistem, basicamente, em acrescentar o comportamento anisotrópico segundo a teoria de Boehler e Sawczuk e simular alguns casos reais envolvendo aterros sobre solos moles.

## AGRADECIMENTOS

Este estudo foi desenvolvido com base na Lei de Incentivo à Pesquisa e Desenvolvimento da ANP nº 9.478, de 06/08/1997, e o autor agradece à Repsol Sinopec Brasil por todo o apoio a este trabalho. Além disso, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, M. S. S., & Ferreira, C. A. M. (1992). Field, in situ and laboratory consolidation parameters of a very soft clay. In *Predictive Soil Mechanics: Proceedings of the Wroth Memorial Symposium held at St Catherine's College, Oxford, 27-29 July 1992* (pp. 73-93). Thomas Telford Publishing.
- Almeida, M.S.S. & Marques, M.E.S. (2003). The behaviour of Sarapuí soft clay. Tan, et al. (Eds.), *Characterisation and Engineering Properties of Natural Soils*, vol. 1, Swets & Zeitlinger, Lisse, pp. 477-504
- Bhandari, A. R., & Inoue, J. (2005). Strain localization in soft rock—a typical rate-dependent solid: experimental and numerical studies. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 29(11), 1087-1107.
- Cirone, A., Vargas, E. (2024). Viscous Nucleus Function of Soft Clay Derived from Hydrostatic Stress Relaxation. *Indian Geotech J.* <https://doi.org/10.1007/s40098-024-00963-0>
- Lacerda, W.A., Costa-Filho, L.M. & Duarte, A.E.R. (1977). Consolidation characteristics of Rio de Janeiro Soft Clay, *Proc. Int. Symp. on Soft Clay*, Bangkok, pp. 231-243.
- Perzyna, P. (1963). The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. *Quarterly of applied mathematics*, 20(4), 321-332.
- Perzyna, P. (1966). Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in applied mechanics*, 9, 243-377.
- Vieira, L.O.M. (1988). *Contribuição ao estudo do adensamento secundário*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 137 p.